

# Die Bestimmung der Mondphase für Hobby-Astronomen

## Teil 1

Zugrunde gelegt wird ein idealisierter Mond, dessen Bahn kreisförmig ist und in der Ekliptik liegt. Bei größeren Ansprüchen an die Genauigkeit muss die Libration des Mondes berücksichtigt werden. Die Monderscheinung wird üblicherweise durch Phase  $P$  und Phasenwinkel  $\Phi$  beschrieben (vgl. Tabelle).  $\Phi$  ist der Winkel zwischen Erde und Sonne vom Mond aus betrachtet.  $\Phi'$  ist der Winkel zwischen dem Mond und der Sonne von der Erde aus betrachtet. Da die Winkelsumme  $180^\circ$  beträgt und der Winkel zwischen Erde und Mond von der Sonne aus fast Null ist, gilt:  $\Phi + \Phi' = 180^\circ$ . Das heißt  $\Phi$  und  $\Phi'$  sind zueinander komplementär. Aus Gründen der Praktikabilität wird im weiteren Text  $\Phi'$  betrachtet. Dabei wird für  $\Phi'$  im Uhrzeigersinn laufend - von  $0^\circ$  ausgehend (Neumond) - der Wertebereich  $[0^\circ, 360^\circ]$  gewählt. Die rechnerische Bestimmung der Mondphase ist recht einfach. Man braucht dazu lediglich den Beobachtungszeitpunkt, die Zeit des letzten Neumonds und die Dauer eines synodischen Monats (Neumond bis Neumond).

Für den Winkel  $\Phi'$  (Abb.1) gilt eine Verhältnissgleichung:  $\frac{\Phi'}{360^\circ} = \frac{\Delta t}{T}$   $\Phi'$ : gesuchter

Phasenwinkel,  $\Delta t$ : Zeit zwischen Neumond und Beobachtung,  $T$ : Dauer eines synodischen Monats.

$T = 29,530589$  Tage.

Dabei gelten folgende Bezeichnungen:

Phase	$\Phi$	$\Phi'$	Bezeichnung	Beleuchtung in %
0	$+180^\circ$	$0^\circ$	Neumond	0
0,5	$+90^\circ$	$90^\circ$	1. Viertel	50
1	$0^\circ$	$180^\circ$	Vollmond	100
0,5	$-90^\circ$	$270^\circ$	3. Viertel	50
0	$-180^\circ$	$360^\circ$	Neumond	0

Tab. 1 nach <https://the-moon.wikispaces.com/phase>

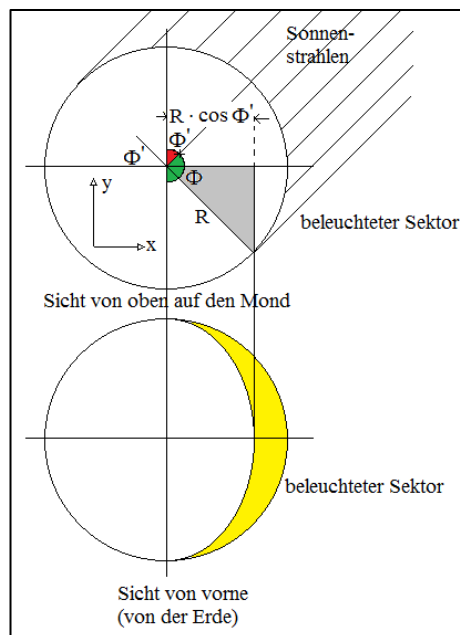


Abb.1 Schema zur Entstehung der Mondphase (hier: zunehmender Mond,  $\Phi'$  wird größer im Uhrzeigersinn)

Zwischenwerte lassen sich anhand der Tabelle leicht angeben. Z.B.  $\Phi = 45^\circ$  bedeutet 75% Illumination,  $\Phi = 135^\circ$  dagegen 25% zunehmender Beleuchtung. Entsprechendes gilt für  $\Phi'$ . Ein abnehmender Mond ist gekennzeichnet durch einen Winkel  $\Phi$  im Bereich  $[0^\circ, +180^\circ]$ , ein zunehmender durch einen Winkel im Bereich  $[-180^\circ, 0^\circ]$ .

Beispiel: Neumond lag am 29.11.2016 um 13:18:32 Uhr vor. Es wurde ein Foto des Mondes am 6.12.2016 gegen 19 Uhr gemacht. Die Zeitdifferenz wurde mit Hilfe eines Kalenders zu 7,2 Tagen bestimmt. Dann ergibt sich:  $\Phi' = \frac{7,2d}{29,5d} \cdot 360^\circ = 88^\circ$ . Es lag also fast genau Halbmond vor.

Die Phase lässt sich auch mit Hilfe eines Fotos ermitteln:

Aus der Sicht des Mondes kreist die Sonne in 29,5 Tagen im Uhrzeigersinn um ihn herum. Der Tag auf dem Mond dauert genauso lange. Der Winkel  $\Phi'$  läuft entsprechend von  $0^\circ$  bis  $360^\circ$ .

Von der Erde aus betrachtet bildet der Terminator eine Halbellipse nach folgender Gleichung:

$$\frac{x^2}{\cos^2 \Phi'} + y^2 = R^2 \quad \text{Gl.1}$$

Mit einem Zeichenprogramm, welches Pixel-Koordinaten kennt (z. B: Paint von Microsoft) kann man R bestimmen und die Strecke  $b = R \cos \Phi'$  ausmessen. Aus  $\cos^{-1}(b/R)$  lässt sich der Winkel  $\Phi'$  und die Phase gewinnen.  $b$ : Kleine Halbachse der Ellipse.

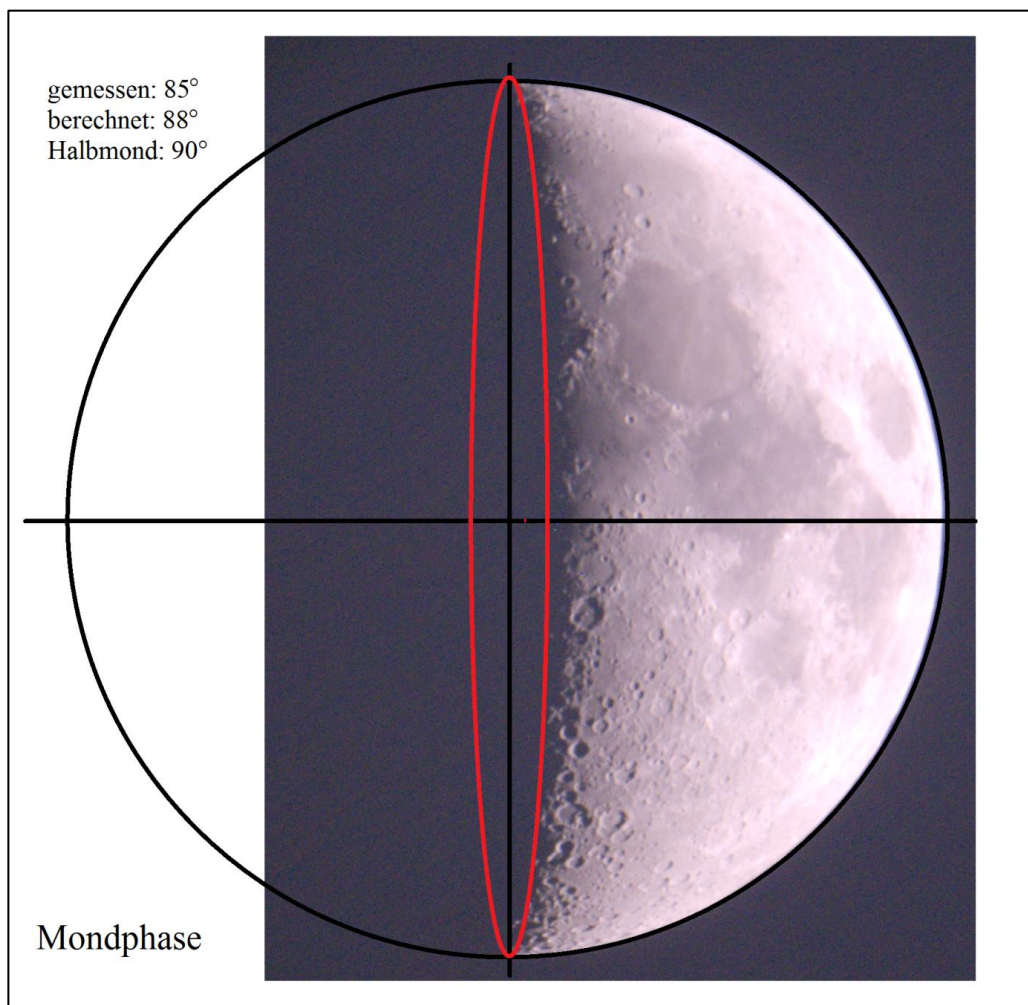


Abb.2 Mond mit angepasstem Kreis und Ellipse als Terminator

## Teil 2

Es wird nun eine genauere Methode vorgestellt, die Phase  $P$  und den Phasenwinkel  $\Phi$  zu bestimmen. Der Phasenwinkel  $\Phi$  wird definiert als Winkel zwischen Erde und Sonne vom Mond aus betrachtet. Der Winkel  $\Phi'$  zwischen Sonne und Mond kann durch folgende Formel ermittelt werden (vgl. <http://mathworld.wolfram.com/about/>):

$$\cos(\Phi') = \sin(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2) + \cos(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2) \cdot \cos(\lambda_2 - \lambda_1) \quad \text{Gl.2}$$

Dabei sind  $\varphi$  und  $\lambda$  die äquatorialen Koordinaten (Rektaszension  $\lambda$  und Deklination  $\varphi$ ) von Sonne und Mond. Diese Koordinaten muss man sich entweder aus dem Internet oder einem Programm wie Cartes du Ciel für den entsprechenden Tag besorgen. Den gesuchten Phasenwinkel  $\Phi$  erhält man daraus durch folgende Beziehung:

$$\Phi = 180^\circ - \Phi' \quad \text{Gl.3}$$

Für die Phase  $P$  gilt dann:

$$P = (1 + \cos \Phi) / 2 = (1 - \cos \Phi') / 2$$

$$P\% = (1 + \cos \Phi) \cdot 50 = (1 - \cos \Phi') \cdot 50 \quad \text{Gl.4}$$

$P\%$  ist dann die Angabe in Prozent;  $P$  eine Zahl zwischen 0 und 1.

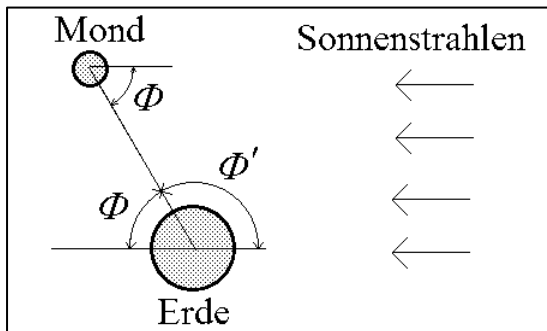


Abb.3 Winkel entsprechend Gl.3

Phasenwinkel und Phase des Mondes				
RA = Rektaszension in hms				
DE = Deklination in °,′,″				
Sonne				
RA	16	55	6,8	
DE	-22	-35	-55,6	
Mond				
RA	22	35	29,55	
DE	-9	-37	-56,5	
Sonne	$\lambda$ in Grad	$\lambda$ in Rad	$\varphi$ in Grad	$\varphi$ in Rad
	253,78	4,43	-22,60	-0,39
Mond	$\lambda$ in Grad	$\lambda$ in Rad	$\varphi$ in Grad	$\varphi$ in Rad
	338,87	5,91	-9,63	-0,17
Vgl Wolfram MathWorld				
cos des Winkels $\Phi'$	Winkel $\Phi'$ in Rad	$\Phi$ in Rad	Winkel in Grad	Phase in %
0,14	1,43	1,71	98,17	
Winkel $\Phi'$ in °		Phase P in %		
81,83		42,89		
$P = (1 + \cos(\Phi)) \cdot 50$ $\Phi = 180^\circ - \Phi'$				
$\Phi'$ : Winkel zwischen Mond und Sonne $\Phi$ : Winkel zwischen Erde und Sonne = Phasenwinkel				

Abb.4 Screenshot einer Tabellenkalkulation mit den Daten des Fotos in Abb.2  
Der Winkel ist *negativ* bei abnehmendem Mond.

Wie im Teil 1 beschrieben wurde am 6.12.2016 um ca. 19 Uhr ein Foto vom Mond gemacht (vgl. Abb.2). Rektaszension und Deklination von Sonne und Mond wurden ermittelt und in die grün unterlegten Felder in Abb. 4 einer Tabellenkalkulation eingegeben. In den schwarzen Feldern werden die Ergebnisse dargestellt. Es ergaben sich ein Phasenwinkel  $\Phi$  von ca.  $98^\circ$  und eine Phase von 43% in Übereinstimmung mit Werten von Cartes du Ciel bzw. aus dem Internet. Der in Abb. 2 dargestellte Wert von  $85^\circ$  ist **nicht** der Phasenwinkel. Entsprechend Gl.3 ist der Phasenwinkel  $180^\circ - 98^\circ = 82^\circ$ . Das ergibt eine Abweichung von dem gemessenen Wert im Teil 1 von  $3^\circ$  bzw. 4 % und von dem berechneten von  $6^\circ$  bzw. 7%. Das im Teil 2 vorgestellte Verfahren ist also erheblich genauer.

Mit der Mondphase kann auch der Anteil der beleuchteten Fläche bestimmt werden. Mit einem Graphikprogramm z.B. Paint von Microsoft werden gemessen

a) die Fläche des Mondes  $A_{Mond} = \pi \cdot R^2$

b) die Fläche der Ellipse  $A_{Ellipse} = \pi \cdot R \cdot b$

Mit  $R$ : Radius des Kreises = große Halbachse der Ellipse,  $b$  : kleine Halbachse der Ellipse.

Es ergaben sich folgende Werte:

$$R = 791 \text{ Pixel}, A_{Mond} = 197 \cdot 10^4 \text{ Px}^2, A_{Ellipse} = 17 \cdot 10^4 \text{ Px}^2, b = 69 \text{ Px}.$$

$$\text{Damit gilt: Anteil} = \frac{A_{Mond} - A_{Ellipse}}{2 \cdot A_{Mond}} = 0,456 = 45,6\%$$

Der Literaturwert ist 43,5%. Somit ist der Messfehler nur ca. 5 %.

Anmerkung:

Die Selenographische Colognitude  $SC$  ist der Winkel zwischen dem Koordinatenursprung der Mond-Koordinaten und dem Punkt, an dem gerade die Sonne aufgeht. Der Winkel wird gegen den mathematisch positiven Sinn gezählt mit Blickrichtung auf den Nordpol des Mondes. Für diesen Tag wird für  $SC$  ein Wert von  $1^\circ$  angegeben. Danach müsste die sichtbar beleuchtete Fläche größer als die Hälfte des Mondes sein. Es wird jedoch ein Wert von  $0,456 < 0,5$  angegeben.

Der Grund liegt in der Lunation, d.h. in der veränderlichen Zeitspanne für einen Umlauf des Mondes um die Erde. Ein Grund dafür ist, dass der Mond auf einer elliptischen Bahn um die Erde läuft, die um ca.  $5^\circ$  gegen die Ebene der Ekliptik geneigt ist.

*Dr. Reinhard Piäper*